

MEM6810 工程系统建模与仿真

中美物流研究院
上海交通大学

2025年春 (非全日制)

作业 1

截止时间: 4月6日 09:00

说明

- (a) 相关解答以电子版 (Word 或 PDF) 的形式上传至 Canvas.
 - (b) 相关的文件 (如 Excel、程序源文件、仿真软件源文件等) 也需上传至 Canvas (如多于一个文件, 请打包后再上传).
 - (c) 在解答中指明与每一题对应的相关源文件 (如有).
 - (d) 电子文件、压缩包的文件名称中请注明姓名与学号.
 - (e) 晚于截止时间上交, 记为 0 分; 若有抄袭行为, 双方均记为 0 分.
-

问题 1, 抢红包游戏的蒙特卡洛仿真 (25 + 25 + 25 + 25 = 100 分)

某互联网公司开发了一个抢红包游戏, 使用了“二倍均值算法”以及“一分钱保底”来随机分配红包金额。具体地, 假设一个人发了一个总额为 a 元的红包, 设置的人数为 n , 那么第一个抢红包的人获得的金额将会是一个 $\text{uniform}(0.01, 2a/n)$ 随机数¹²。依此类推, 假设第一个人得到的金额是 a_1 , 那么第二个抢红包的人获得的金额将会是一个 $\text{uniform}(0.01, 2(a - a_1)/(n - 1))$ 随机数; 假设第二个人得到的金额是 a_2 , 那么第三个抢红包的人获得的金额将会是一个 $\text{uniform}(0.01, 2(a - a_1 - a_2)/(n - 2))$ 随机数..... 对于倒数第二个人 (即, 第 $n - 1$ 人) 来说, 此时余额还有 $a - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-2}$, 那么他获得的金额将会是一个 $\text{uniform}(0.01, a - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-2} - 0.01)$ 随机数 (此处减去 0.01 是为了确保最后那个人 (即, 第 n 人) 至少可以得到 0.01 元); 假设第 $n - 1$ 人得到的金额是 a_{n-1} , 那么第 n 人获得的金额就是 $a_n = a - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1}$ 。

令 $a = 6$, $n = 6$ (即, 六块钱的红包六个人抢), 使用蒙特卡洛仿真方法回答下列问题。使用 Excel 或任何编程语言实现都可以, 相关源文件请上传。仿真重复数设为 100000, 即在一次蒙特卡洛仿真中执行 100000 次实验。

- (1) 对于第 i 个抢红包的人, $i = 1, 2, \dots, 6$, 平均来说他能抢到多少钱 (即, 红包金额的期望值) ?

¹实际情况中, 因为金额最小单位通常为分 (即 0.01 元), 可以有多种方法将随机产生的金额的小数位数统一到两位。这里为了简便起见, 忽略这一因素, 允许金额有任意多的小数位数。

²在第一个抢红包之前, 总额还剩 a 元, 而可抢人数为 n , 所以此时的人均金额是 a/n 元。这时将第一个人可以抢到的金额下限设置为 0.01 元 (防止出现空红包), 上限设置为 $2a/n$ (防止第一个人把钱全领走)。该方法通常被称为“二倍均值算法”。

- (2) 对于第 i 个抢红包的人, $i = 1, 2, \dots, 6$, 他抢到的钱超过 2 元的可能性 (即, 概率) 是多少? 超过 3 元呢? 超过 4 元呢?
- (3) 对于第 i 个抢红包的人, $i = 1, 2, \dots, 6$, 他抢到的钱低于 1 元的可能性 (即, 概率) 是多少? 低于 0.5 元呢? 低于 0.1 元呢?
- (4) 在这个例子中, 第几个抢红包的人更有可能成为手气王 (即, 抢到金额最高的人)? 还是跟抢的顺序无关?

推荐阅读: <https://www.bilibili.com/video/BV1z7411e7qB>